Primeiro dia

21 de setembro de 2019

Problema 1. Determinar todas as soluções com números inteiros x, y, z da equação

$$x^z + y^z = z.$$

Problema 2. Considere o conjunto

$$\{0,1\}^n = \{X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{0,1\}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Dizemos que $X > Y$ se $X \neq Y$ e se cumprem as n desigualdades

$$x_1 \geq y_1, \quad x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2, \quad \ldots \quad , \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Definimos uma cadeia de comprimento k como um subconjunto $\{Z_1, \ldots, Z_k\} \subseteq \{0,1\}^n$ de elementos distintos que satisfazem $Z_1 > Z_2 > \cdots > Z_k$. Determine o maior comprimento possível de uma cadeia.

Problema 3. Seja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não-nulos. Para $m \geq 1$, definimos:

$$X_m = \left\{ X \subseteq \{0,1,...,m-1\} \colon \left| \sum_{x\in X} a_x \right| > \frac{1}{m} \right\}$$

Demostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{2^n} = 1.$$

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.

Segundo dia

22 de setembro de 2019

Problema 4. Seja $(G, *)$ um grupo de $n > 1$ elementos e $g \in G$ um elemento diferente da unidade. Ana e Bob jogam com o grupo G da seguinte forma: Começando com Ana e jogando de forma alternada cada jogador seleciona um elemento de G que não tenha sido escolhido antes, até que cada elemento de G tenha sido escolhido ou um jogador tenha escolhido os elementos a e $a * g$ para algum $a \in G$. Neste caso se diz que o jogador perde e seu oponente ganha.

a) Se n é ímpar, demostrar que, independente do elemento g, um dos dos jogadores tem una estratégia que lhe asegure ganhar sem importar como joga seu oponente e determinar qual jogador possui tal estratégia.

b) Se n é par, demostrar que existe um elemento $g \in G$ para o qual nenhum dos jogadores possui una estratégia que lhe asegure ganhar.

Nota: Um grupo $(G, *)$ é um conjunto G com uma operação binária $* : G \times G \to G$ que satisfaz as seguientes propriedades:
i) $*$ é associativa: $\forall a, b, c \in G \ (a * b) * c = a * (b * c)$;
ii) existe uma unidade $e \in G$ tal que $\forall a \in G \ a * e = e * a = a$;
iii) existem inversos: $\forall a \in G \ \exists a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Problema 5. Seja $\{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ um conjunto de m números inteiros. Demostrar que existe una matriz $m \times m$ com entradas inteiras A tal que as matrizes $A + k_j I, 1 \leq j \leq m$ são invertíveis e suas inversas têm entradas inteiras (aqui I denota a matriz identidade).

Problema 6. Determinar todas as funções injetivas $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, tais que cada par de interos positivos (m, n) cumpre as condições:
a) $f(mn) = f(m)f(n)$
b) $f(m^2 + n^2) \,\Big|\, f(m^2) + f(n^2)$.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.